Über die Welt in Ausdehnung

Von G. Maneff.

(Eingegangen am 21. Januar 1932.)

Es wird gefunden, daß die Ausdehnungsgeschwindigkeit der nichtstationären Welt die des Lichtes übertrifft. Um sie gleich $c (= 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec) werden zu lassen, muß man als asymptotischen Krümmungsradius den Einsteinschen Radius R_E nehmen. Aus Beobachtungen über die Spiralnebel wird eine Verbesserung der Ergebnisse von Hubble für R_E abgeleitet.

Die erste Form einer Welt mit veränderlichem Krümmungsradius, in der die Welten von Einstein und de Sitter als Spezialfälle enthalten sind, wurde von A. Friedman[1]) gegeben. G. Lemaître[2]) geht weiter, indem er den Dopplereffekt der außer-galaktischen Nebel mit dem veränderlichen Radius der nichtstationären Welt verknüpft, um für die systematischen Geschwindigkeiten der Nebel eine Erklärung geben zu können.

Bei dem nichtstationären Fall wird die Zeit als dem Raume orthogonal angenommen, d. h. $g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0$. Das Linienelement ds^2 wird daher:

$$d s^2 = -\frac{R^2(x_4)}{c^2}(d x_1^2 + \sin^2 x_1 \, d x_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 \, d x_3^2) + d x_4^2, \quad (1)$$

wo $x_4 = t$ und R eine Funktion von t darstellt. Benutzen wir die mit dem kosmologischen Glied λ erweiterten Feldgleichungen, so kommen wir in Verbindung mit (1) zu den Gleichungen:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2 R R''}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0 \quad (2)$$

und

$$\frac{3 R'^2}{R^2} + \frac{3 c^2}{R^2} - \lambda = \varkappa c^2 \varrho, \quad (3)$$

wo R' und R'' die erste und zweite zeitliche Ableitung der R bedeuten. Die Gleichung (3) führt zum elliptischen Integral von Friedman:

$$t = \frac{1}{c} \int\limits_0^R \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3 c^2} x^3}} \, d x, \quad (4)$$

wo

$$A = \frac{\varkappa \varrho R^3}{3} = \frac{\varkappa \overline{M}}{6 \pi^2}. \quad (5)$$

[1]) A. Friedman, ZS. f. Phys. 10, 377, 1922.

[2]) G. Lemaître, Ann. de Bruxelles, s. A. 47, 49—59, 1927.

Da $\overline{M}$ die gesamte Masse im Raume darstellt, die laut Bedingung konstant ist, so ist auch A, obwohl ϱ und R einzeln von der Zeit abhängen, konstant.

Außerdem ergibt (4) die Zeit, die verstreichen muß, um den Radius der nichtstationären Welt von 0 bis R anwachsen zu lassen. Dies ist also die Zeit seit der Erschaffung der Welt, d. h. von jenem Anfangsmoment an, bei dem der ganze Raum samt Masse in einem einzelnen Punkt zusammengehalten war ($R = 0$), bis zum heutigen Weltzustand ($R = R_t$). Um den Charakter dieser nichtstationären Welt klarzulegen, ist es von Wichtigkeit, eine Bestimmung der t aus der Formel (4) vorzunehmen. Da ds^2 aus (1) bei $R = \text{const}$ und $g_{44} = 1$ genau mit dem Linienelement der Einsteinschen Welt zusammenfällt, so können wir aus (2) und (3) in Verbindung mit $R' = R'' = 0$ die Konstante A bestimmen. In der Tat können wir aus (2) folgende Beziehung

$$\lambda = \frac{c^2}{R_E^2} \tag{6}$$

herleiten und aus (3)

$$R_E^2 = \frac{2}{\varkappa \varrho_0}, \tag{7}$$

worin ϱ_0 die konstante Dichte der Einsteinschen Welt bedeutet. Die Konstante A selbst wird daher

$$A = \frac{\varkappa \varrho_0 R_E^3}{3} = \frac{2}{3} R_E. \tag{8}$$

Sodann wandelt sich (4), vermöge der Substitution:

$$\frac{x}{R_E} = y \tag{9}$$

und bei Benutzung von (6), (7), in ein pseudoelliptisches Integral

$$t = \frac{R_E}{c} \int_0^y \sqrt{\frac{3y}{2 - 3y + y^3}}\, dy \tag{10}$$

um. Durch eine neue Substitution in (10):

$$z = \sqrt{\frac{y}{2 + y}} \tag{11}$$

ergibt sich:

$$ct = \sqrt{3} \cdot R_E \int_0^z \frac{4 z^2\, dz}{(1 - z^2)\,(1 - 3 z^2)}, \tag{12}$$

was aufgelöst

$$ct = \sqrt{3}\cdot R_E \log \frac{1-z}{1+z} + R_E \log \frac{1+\sqrt{3}\,z}{1-\sqrt{3}\,z} \tag{13}$$

liefert.

Wenn die Integrierung über den EINSTEINschen Raum für $x = R_E$, d. h. $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ausgeführt wird, so folgt für die Zeit $t = \infty$. Integrieren wir aber über den Raum von LEMAÎTRE für $x = R = 0{,}215\, R_E$, wo nach HUBBLE $R_E = 8{,}5\,.\,10^{28}$ cm ist, so erhalten wir für

$$z = 0{,}312, \tag{14}$$

was in (13) eingesetzt

$$ct = 0{,}091\, R_E = 0{,}42\, R \tag{15}$$

oder

$$t = 8\,.\,10^9 \text{ Jahre} \tag{16}$$

ergibt. Dies ist die seit der Erschaffung der nichtstationären Welt verstrichene Zeit. Berücksichtigen wir den von LEMAÎTRE gefundenen Radius $R = 18\,.\,10^9$ Lichtjahre, so wird klar, daß es sich hier um eine mit Lichtgeschwindigkeit wachsende Welt handelt. Streng genommen übertrifft die Ausdehnungsgeschwindigkeit die der Lichtfortpflanzung um das Zweifache: wir werden später den Sondercharakter dieses Ergebnisses begreifen.

Jedenfalls zeigt die gleiche Größenordnung dieser Zahlen, der Zeit seit der Erschaffung und des in Lichtjahren ausgedrückten Radius, daß die nichtstationäre Welt zu keiner geschlossenen Welt, sondern zu einer Welt-Insel im unendlichen Raume führt. In diesem Falle geht die ausgestrahlte Energie mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 3\,.\,10^{10}$ cm/sec im Raume verloren, bis sie vollkommen zerstreut wird. Dasselbe geschieht auch mit der Materie. Eine solche Welt-Insel vermeidet alle Schwierigkeiten, löst aber keine auf[1]).

Fast dieselbe Zeitperiode seit der Erschaffung der nichtstationären Welt wurde von EINSTEIN[2]) gefunden. Indem er einen Kugelraum mit veränderlicher Krümmung betrachtet, stellt er fest, daß seit dem Moment, für den $R = 0$ war, nur etwa 10^{10} Jahre vergangen sind.

LEMAÎTRE selbst vermutet, daß die Ursache für die Expansion in der Strahlung[3]) liegt, ferner aber versucht er, dieselbe mit einer sonderbaren physikalischen Stagnationshypothese zu erklären[4]). Alles dies lehrt nur,

---

[1]) J. BECQUEREL, Le principe de relativité 1922, S. 272.
[2]) A. EINSTEIN, Berl. Ber. 1931, S. 235.
[3]) G. LEMAÎTRE, l. c.
[4]) G. LEMAÎTRE, M. N. **19**, 490, 1931.

wie schwierig und verwickelt die physikalischen Bedingungen in der nichtstationären Welt erscheinen, wenn man über die rein mathematische Darstellung hinausgehen will.

Wie oben erwähnt, führen die Ergebnisse mit dem Radius von LEMAÎTRE

$$R = 0{,}215\ R_E \tag{17}$$

zu einer Sachlage, die dem Aufbau der nichtstationären Welt nicht entspricht, d. h. nach (15) dehnt sich die Welt mit einer zweimal größeren Geschwindigkeit als der des Lichtes aus. Berücksichtigen wir anderseits, daß in der nichtstationären Welt der Druck und damit auch die Massendichte veränderlich sind, und gehen wir von den systematischen Geschwindigkeiten der extra-galaktischen Nebel aus, so können wir den Radius der EINSTEINschen homogenen Welt R_E bestimmen.

Zunächst betrachten wir den Radius R von LEMAÎTRE im gegenwärtigen Augenblick. Gehen wir aus von dem durch (17) gegebenen R, so kommen wir zu dem Wert von z gemäß (17) und damit zu dem Ergebnis 0,182 R auf der rechten Seite von (15). Berücksichtigen wir aber, daß in der nichtstationären Welt die Massendichte und der Druck zeitlich variabel sind, so erscheint dieselbe Welt deformiert, wobei das Verhältnis zwischen R und R_E, also die Zahl y, das gleiche ist wie in der deformierten Welt[1]):

$$y = \frac{R}{R_E} = \sqrt{\frac{8}{9}}. \tag{18}$$

Hier ist der Vergleichsradius der EINSTEINsche, da bei der nichtstationären Welt, wie man aus (1) ersieht, die EINSTEINsche Welt als Ausgangspunkt dient. In diesem Falle haben wir für

$$z = 0{,}56602 \tag{19}$$

und für R erhalten wir
$$ct = 2{,}038\ R_E = R. \tag{20}$$

Die Werte des R nach (20) und (18) sind aber ungleich. Es bleibt also übrig, die Interpolation durchzuführen. In der Tat, nehmen wir einen Wert

$$z = 0{,}474 \tag{21}$$

an, der sich wenig von (19) unterscheidet, so erhalten wir

$$ct = 0{,}56\ R_E = R, \tag{22}$$

also den gleichen Wert wie bei (21). Offenbar geht hier, in dem so deformierten Raume, nicht nur die Fortpflanzung der Strahlung, sondern auch die Weltausdehnung mit derselben Geschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec vor sich.

---

1) G. MANEFF, diese ZS. 4, 231, 1932.

Dieses Ergebnis liefert uns die Möglichkeit, die zweite Frage zu beantworten: den Radius R_E direkt aus den Beobachtungen über die Geschwindigkeiten der Spiralnebel zu bestimmen, um dadurch die mit anderen Methoden gefundenen Ergebnisse von HUBBLE revidieren zu können. Zu dem Zwecke gehen wir aus von (3) und schreiben in Verbindung mit (6), (7), (8) und (9)

$$\frac{3}{c^2}\left(\frac{R'}{R}\right)^2 R_E^2 = \frac{2}{y^3} - \frac{3}{y^2} + 1, \tag{23}$$

worin $y = \frac{R}{R_E}$ ist.

Wir werden auch die Ergebnisse von LEMAÎTRE bei der Betrachtung des Zusammenhanges zwischen Dopplereffekt und Variation des Weltradius[1]) benutzen. LEMAÎTRE erhält

$$\frac{R'}{R} = \frac{v}{cr}, \tag{24}$$

worin r für den Fall $c = 1$ gegeben ist. In absolutem Maßsystem wird daher

$$\frac{1}{c}\frac{R'}{R} = 0{,}68 \,.\, 10^{-27}\,\text{cm}^{-1}, \tag{25}$$

wobei $v = 600$ km/sec gesetzt ist, entsprechend der $0{,}95 \,.\, 10^6$ parsec oder 625 km/sec per 10^6 parsec. Setzen wir den Wert aus (25) in (23) ein und nehmen wir $y = R/R_E = 0{,}56$ aus (22) oder (21), so erhalten wir den Radius

$$R_E = 1{,}3 \,.\, 10^{27}\,\text{cm}, \tag{26}$$

der 70 mal kleiner als der von HUBBLE berechnete und $1^1/_2$ mal größer als das R_0 (bei LEMAÎTRE) ist.

Vergleichen wir ferner unsere Ergebnisse, die sich auf Grund des FRIEDMANschen Integrals (4) ergeben, mit jenem von LEMAÎTRE, so stellt sich ein großer und wesentlicher Unterschied heraus. Zuerst setzt LEMAÎTRE

$$\varkappa\delta = \frac{\alpha}{R_E^2}, \tag{27}$$

wobei seine Konstante $\alpha = 3\,A$ und A diejenige ist, die wir benutzt haben, also diejenige von FRIEDMAN. Das Wesentliche bei unserer Gleichung (5) und der von LEMAÎTRE (27) ist die zeitliche Abhängigkeit der R und δ; sie können nur im Grenzfalle — der EINSTEINschen Welt — konstant sein. Und wenn LEMAÎTRE setzt

$$\varkappa\delta = \frac{2}{R_E^2}, \tag{28}$$

[1]) l. c. S. 54.

so ist es gar nicht nötig, die weitere Hypothese

$$\alpha = 2 R_0 \tag{29}$$

zu machen, sondern man muß einfach $\alpha = 2 R_E$ postulieren. Das Auftreten des R_0 und seine Bezeichnung als eines asymptotischen Wertes für $t = -\infty$ zeigt, daß es sich hier tatsächlich um den konstanten Wert R_E handelt. Die Konstanz des R_0 folgt auch aus dem mit (4) ähnlichen Integral. Es ist gar nicht verständlich, weshalb LEMAÎTRE

$$R^3 = R_E^2 R_0 \tag{30}$$

setzt.

Alles dies wird aus unseren darauffolgenden Rechnungen begreiflich. Bei der Berechnung des R sahen wir, daß die nichtstationäre Welt deformiert ist. In der Tat kommt in dieser λ vor, wie bei EINSTEIN und de SITTER aber hier dient λ nicht dazu, die Stabilität der Welt zu sichern, sondern ändert nur die Weltdimensionen, d. h. den Wert des R, und bedingt daher gerade ihren nichtstationären Charakter. LEMAÎTRE sucht die Erklärung des Dopplereffektes nicht in der deformierten Welt; er kann sie auf diesem Wege nicht finden, da er von Anfang an die effektive Massendichte derjenigen der Materie gleichsetzt, d. h. $\delta = \varrho$. Deswegen greift er auf die zeitliche Variation des Weltradius zurück.

Aus dem oben Dargelegten ersieht man, daß die nichtstationäre Welt nur für die Lichtstrahlung verwirklichbar ist, nicht aber für die materiellen Systeme. Obwohl in ihre Gleichungen λ eingeht, stellt sich doch kein geschlossenes System dar. Um sie aufbauen zu können, ist es nötig, nach Ausführung der entsprechenden Bezeichnungen in der EINSTEINschen Welt, den Radius dieser letzteren nicht nur als asymptotisches R_E für die nichtstationäre Welt zu nehmen, sondern sein R auch einer Deformation zu unterwerfen.

Sofia, Physikalisches Institut der Universität.